$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x \geq 0 \\ x+2+\sqrt{x^2+4x} > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe(x^2+4x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x^2+4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$ ou $x \geq 0$.

• Pour $x \geq 0$ on a : $x+2+\sqrt{x^2+4x} > 0$ d'où $\forall x \geq 0$ on a $x \in D_f$

• Pour $x \leq -4$ on a $x+2 \leq -2$ par suite

$$x+2+\sqrt{x^2+4x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4x}+x+2\right)\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)}$$

$$= \frac{x^2+4x-(x+2)^2}{\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)} = \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)} < 0$$

D'où pour tout $x \leq -4$ on a $x \notin D_f$.

Bilan : $D_f = \mathbb{R}^+$.

b- $\star$ la fonction qui à $x \mapsto x^2+4x$ est dérivable et strictemnt positive sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \sqrt{x^2+4x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\Rightarrow$ la fonction qui à $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+4x}+x+2}{2}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow$ la fonction $f : x \mapsto \text{Log}\left[\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\otimes$ Etudions la dérivabilité de f à droite en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Log}\left[1+\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Log}\left(1+\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)}{\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}} \times \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{Log}\left(1+\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)}{\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[\dfrac{\text{Log}[1+X]}{X}\right] = 1$

(on pose $X = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}$; quand $x \to 0^+$ on a $X \to 0^+$)

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(1+\sqrt{1+4/x})}{2x} = +\infty$.